N OTES De Lecture

OEuvres complètes de Jean Le Rond d'Alembert, série I, vol 6, Premiers textes de mécanique céleste 1747-1749

éd. Michelle Chapront-Touzé

CNRS Éditions.

Dans un de nos précédents numéros (Quadrature n° *50, p. 2), nous avions évoqué l'édition des oeuvres complètes de d'Alembert. Le premier (et aujourd'hui seul) volume paru tourne presque entièrement autour du problème des trois corps, question centrale du XVIII' siècle scientifique. Il fallait le point de vue d'un mathématicien spécialiste de ce difficile problème. Merci à Alain Chenciner pour la note ci-dessous, parue dans la* Gazette des mathématiciens *de janvier 2004, et merci à la Société Mathématique de France qui nous a permis de la reproduire (NDLR).*

« 11 n'est pas inutile de rappeler les travaux antérieurs quand ils émanent d'hommes de génie ; plus d'une tentative récente vient se souder aux travaux antérieurs et se trouve ainsi mieux mise en valeur » (Tisserand, préface du troisième volume du *Traité de mécanique céleste,* « Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune »).

I Petit exercice en guise d'introduction

i) L' équation polaire $p(z) = a(1- e^2)/(1\ e \cos z)$, dans laquelle j'adopte pour l'angle la notation z de d'Alembert, représente une ellipse d'excentricité e dont le foyer est à l'origine et dont les angles sont mesurés depuis *l'apogée,* c'est-à-dire le point le plus éloigné du foyer O (disons la Terre). Posons

$$u(z) = P(0)^2\, 1P(z) = -H(1 - e \cos z),$$

$$\text{avec } H = -a\ \frac{1+e}{1-e}$$

La fonction u(z) est la solution qui vérifie $u(0) = a(1 + e), u'(0) = 0$, de l'équation différentielle linéaire du second ordre $d^2u/dz^2 + u + H = 0$, que d'Alembert écrit $d^2u + udz^2 + Hdz^2 = O$. La solution présente un unique minimum local (et donc global) Zap = 0 modulo 27r, qui définit l'apogée de p(z).

ii) Le remplacement de cette équation différentielle par $d^2u + N^2udz^2 + Hdz^2 = 0$ introduit une *avance de l'apogée* uniforme de $27r[N^{-1} - 1]$, c'est-à-dire environ *Jra* radians par période si $N^2 = 1 - a$ avec a petit : à chaque tour, l'angle z du nouveau minimum local se décale de $27r[N^{-1} - 1]$. La solution ayant les mêmes conditions initiales est en effet donnée par $u\ -(H/N^2)(1\ \ e \cos Nz)$ (voir la figure 1).

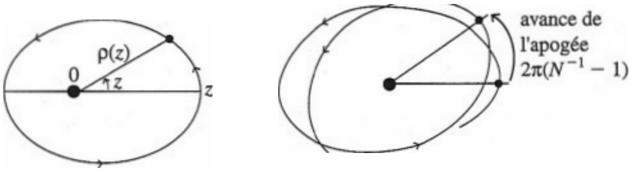

Figure 1.

iii) Si enfin *H* est remplacé par une fonction M(z) de (d'une détermination réelle de) z, *i.e.* si l'équation différentielle devient $d^2u + N^2udz^2 + M(z)dz^2 = 0$, la solution obtenue par la méthode de la variation des constantes **s'é**crit $u = $ _kilin [$_e$iNz f e-iNz ez)dzi.

Si en particulier M(z) = *K* cos(pz+A) avec *p # N,* l'unique solution up telle que uo(0) et $u'_o(0)$ s'annulent peut s'écrire

$$uo(z) = \frac{K \cos(pz + A)}{1V2\ p2}$$

$$\frac{K \cos(A - Nz)}{2N(N + p)}\ \frac{K \cos(A + Nz)}{2N(N - p)}$$

Si

$$M(z) = H + K \cos(pz + A) + \cdots$$
$$+ L\sin(Rz + C) + \cdots ,$$

à l'avance moyenne de l'apogée se superpose donc, en l'absence de résonance, une modulation quasi-périodique qu'on appelle, au xvrrr^e siècle, *l'équation.* Notons que $N\ p$ peut être arbitrairement petit : c'est le problème des *petits dénominateurs,* dus aux *quasi-résonances,* qui peuvent rendre très grands certains termes. En cas de *résonance,* c'est-à-dire si

$$M(z) = K \cos(Nz + A),$$

la solution u_0 précédente devient

$$140(7.) = \frac{K\cos(A - Nz)}{4N2}$$

$$\frac{K\cos(A + Nz)}{4N^2\,2N} \frac{Kz}{} \sin(A\ Nz).$$

Elle présente des termes non périodiques, les *arcs de cercle,* aujourd'hui appelés *termes séculaires.* Dans ce cas, l'avance moyenne de l'apogée n'est pas bornée.

II La théorie de la Lune de 1748

C'est dans les années 1740 qu'Euler, Clairaut et d'Alembert, utilisant le formalisme leibnizien, constituent le *Problème de trois corps* comme celui de la résolution approchée d'un système d'équations différentielles traduisant l'attraction mutuelle. Le volume qui vient de paraître est une référence centrale pour la compréhension de cette période remarquable de l'histoire de la mécanique céleste. Il s'organise autour du manuscrit de la *Théorie de la Lune de 1748*[1] qui en forme environ les trois-cinquièmes. Publié (et remis en ordre) ici pour la première fois, ce traité, qui est à la base du Livre I des *Recherches sur différents points importans du svstême du monde* paru en 1754, est une théorie complète de la Lune « au premier ordre de la théorie des perturbations ». C'est en fait la première théorie « littérale » du mouvement de la Lune : ce n'est qu'à la fin des calculs que les paramètres sont remplacés par leur valeur numérique.

La petitesse du rapport des distances Terre-Lune et Terre-Soleil est telle que l'action du Soleil sur l'orbite lunaire peut être considérée comme une perturbation de l'attraction de la Terre sur la Lune. Cette dernière décrit donc autour de la Terre une orbite qui, pendant une révolution lunaire est presque elliptique et peut être identifiée en première approximation à une ellipse dont l'excentricité (– 0,05) et l'inclinaison sur le plan de l'écliptique (– 5°) varient très peu, dont le plan tourne lentement (le mouvement de la ligne des noeuds, intersection du plan de l'ellipse avec le plan de l'écliptique) et qui tourne lentement dans son plan (le mouvement de l'apogée, point de l'orbite le plus éloigné de la Terre pendant une révolution). D'Alembert caractérise l'orbite par trois éléments : sa projection sur le plan de l'écliptique. son inclinaison à chaque instant et le mouvement de la ligne des noeuds.

Le mouvement sur le plan de l'écliptique est obtenu en décomposant la force à laquelle est soumise la projection de la Lune sur ce plan en la somme d'une force centrale en l'inverse du carré de la distance due à la Terre et d'une « perturbation », due à la fois à la projection sur l'écliptique et à l'action du Soleil. La perturbation est elle-même décomposée en la somme d'une force ç dirigée vers la Terre et d'une force 7r dirigée perpendiculairement. À ceci s'ajoute la force qui tend à faire sortir la trajectoire du plan de l'écliptique et dont la considération permettra de comprendre le mouvement de la ligne des noeuds. Comme Clairaut et plus tard Laplace, il prend comme variable indépendante non pas le temps mais la « longitude vraie » (ou « anomalie vraie »), c'est-à-dire l'angle polaire mesuré à partir de l'apogée.[2] J'ai rappelé dans l'introduction qu'il note z cet angle. Ne tenant compte que de l'ordre 1 des termes perturbatifs, d'Alembert cherche tout d'abord, une fois fixées la position et la vitesse de la Lune à un instant initial, une équation différentielle ayant pour solution l'équation polaire $p = p(z)$ de la projection de sa trajectoire sur le plan de l'écliptique ou plutôt, comme dans l'introduction, la fonction $u(z) = p(z0)2/p(z)$. Pour ce faire, il calcule, comme le faisait Newton, la modification de la loi des aires causée par la petite force *Ir* et applique la loi de conservation de l'énergie à une force centrale qui fournirait la même orbite géométrique (pas la paramétrisation en temps). Il obtient ainsi une équation de la forme

$$ddu\ F(u,\ du/dz,\ 7r,\ r_i ci) dz^2 = 0.$$

Aujourd'hui, l'obtention de ce type d'équation se réduit à un changement de variables des coordonnées cartésiennes $(p \cos z,\ p \sin z,\ ps)$ aux coordonnées cylindriques $(p,\ z,\ s)$, suivi du passage aux variables $(u = 1/p,\ z,\ s)$ qu'utilise Laplace (aux notations près) dans sa théorie de la Lune. Il vient :

$$IP - Pt^- = -\, r^3 + 40,$$

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dr}\,, \qquad 7r,$$

$$\frac{d2}{dr^2}(P^s) = \qquad + \text{tif},$$

où les points désignent la dérivation par rapport au temps T, r p $+ s^2$ est la distance de la Terre à la Lune, $1i$ une constante et ri/ la composante de la force perturbatrice normale au plan de l'écliptique. On élimine le temps à l'aide de l'équation $p^2 Z = H$, ou encore $dr = p^2 dz/H$, qui donne la composante

[1] Le titre en a été choisi par l'éditeur.

[2] Ce n'est qu'au début du XIXe siècle que l'origine passera de l'apoastre au périastre qui a l'avantage d'exister non seulement pour l'ellipse mais également pour la parabole et l'hyperbole. Merci à Alain Albouy qui m'a montré la remarque au début du *Theoria Motus* dans laquelle Gauss écrit «Nous craignons d'autant moins de rétablir l'analogie entre tous les genres de sections coniques que les astronomes français les plus récents en ont déjà donné l'exemple ».

du moment cinétique orthogonale au plan *(x,* y) de l'écliptique, dont la dérivée dépend de 7r. Les deux premières équations fournissent alors l'équation cherchée (pour les détails du calcul, on peut se reporter au chapitre V du premier volume du *Traité de mécanique céleste* de Tisserand après avoir remplacé z par *t)* et la latitude par z).

Mais revenons à d'Alembert ; il lui faut maintenant exprimer les forces 7r et *g)* en fonction de *u* et z. Arguant de la faible excentricité de l'orbite lunaire, il simplifie le problème en posant $u = K + t$, où *K* est une constante et *t* (qui n'a rien à voir avec le temps, que nous avons pris soin de noter 7) mesure la (faible) non-circularité de la projection de l'orbite sur le plan de l'écliptique, ce qui permet de négliger t^2. L'équation que vérifie *t* prend la forme

$$ddt + N^e t\, dz^2 + M(t, dt/dz, \cos(pz + A), \ldots)\, dz^2 = 0.$$

Attardons-nous sur le coefficient N^2, dont nous avons rappelé dans l'introduction qu'il donne l'avance moyenne de l'apogée. II provient d'un terme en 1/u dans l'expression de la composante 4 de la perturbation, auquel correspond un terme en $1/u^3$, que d'Alembert remplace par $1/K^3 - 3t/K^4$, dans l'équation différentielle dont *u* est solution. Que seule la composante ço intervienne n'est pas pour nous étonner puisqu'une telle avance peut être obtenue par une légère modification de la loi (toujours centrale) de l'attraction (voir le paragraphe suivant). Le calcul donne $N^2 = 1 - 4$, où n^2 est le produit du rapport des distances moyennes (Terre-Lune)/(Soleil-Lune) par le rapport de la force exercée par le Soleil sur la Lune à la force exercée par la Terre sur celle-ci. Dans l'hypothèse d'orbites kepleriennes circulaires, la troisième loi de Kepler (le cube r^3 du rayon est proportionnel au carré T^2 de la période) implique que la force en $1/r^2$ exercée par un corps sur un autre en orbite circulaire autour de lui est proportionnelle au rapport *rIT2.* Dans cette approximation, *n* est donc simplement le rapport de la période de révolution de la Lune autour de la Terre à celui de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire n^2 — 178+ si l'on adopte comme d'Alembert la valeur utilisée par Newton.

Les quantités *t* et dt/dz sont de l'ordre de l'excentricité de la Lune. Si S et *e* sont les valeurs qu'elles prennent à l'instant origine, la solution de l'équation différentielle sans second membre obtenue en oubliant la perturbation *M* est simplement t = cos Nz+(e/N) sin Nz. Remplaçant dans *M* les termes *t* et dt/dz respectivement par cette expression et sa dérivée, utilisant une approximation de la distance variable de la Terre au Soleil et négligeant les termes d'ordre supérieur[3], d'Alembert obtient une équation du type de celles que nous avons étudiées dans l'introduction. Il ramène l'équation différentielle du second ordre à un système du premier ordre et résout ce dernier comme nous l'avons fait, après diagonalisation. par « variation des constantes » (une technique publiée par Jean Bernoulli en 1697 dans les *Acta Eruditorum)*[4]. Les calculs sont systématiquement effectués en complexe à l'aide de l'« identité d'Euler » sur l'exponentielle complexe, publiée seulement quelques années auparavant par Euler mais déjà connue de Robert Cotes *(Philosophical Transactions, 1714)'.* Le résultat contient un certain nombre de termes mais, en vue du calcul de l'« équation de l'apogée », une première approximation est obtenue en ne gardant que ceux dont le dénominateur est suffisamment petit pour qu'ils dominent les autres. D'Alembert obtient ainsi la formule approchée

$$u \quad I - \frac{1}{20}(\cos Nz - 1) \quad \frac{1}{180}\cos(2z + 2A - 2nz) - \frac{1}{180}\cos(Nz - 2z - 2A + 2nz)$$

dans laquelle 1/20 est l'excentricité de la Lune, A est, comme il le dit joliment, « l'élongation de la Lune au Soleil lorsqu'elle commence à décrire son orbite » (i.e. lorsque z = 0) et z + A – nz = *Z* est cette élongation au temps correspondant à une valeur donnée de z (en effet, la Terre parcourt un angle nz sur l'écliptique pendant que la Lune parcourt l'angle z). Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

C'est la méthode de résolution d'une telle équation différentielle linéaire du second ordre à second membre quasi-périodique qui est l'objet du premier chapitre de la *Théorie de la Lune de 1748.* En commençant par décrire cette résolution, je ne faisais donc que suivre d'Alembert. Tisserand commencera de même le troisième volume de son *Traité de mécanique céleste* par la résolution de l'équation de Gylden-Lindstedt, cas particulier de l'équation de Hill.

Il est intéressant de comparer ce que dit d'Alembert à 20 ans d'intervalle sur la méthode qui consiste à supposer que u s'écarte peu d'une constante *K.* En 1748, il écrit « Tout l'artifice dont je me sers pour

[3] Plus précisément, les « petits » paramètres dont on néglige les termes quadratiques sont le rapport *n* des périodes de révolution lunaire et terrestre, la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, l'excentricité de la Lune et celle du Soleil.

[4] Leibniz connaissait déjà la formule donnant la solution par quadratures. Merci à Daniel Bennequin de cette précision qu'il doit à la note au bas de la page 21 du livre *Orclinaly differentiai equations* de E.L. Ince.

[5] Merci à Alain Albouy de cette précision qu'il doit à l'History *of mathematics* de Cajori.

déterminer l'orbite lunaire eu égard aux deux excentricités, consiste à substituer $K\ t$ au lieu de u dans l'équation générale... Par la substitution de $K + t$ au lieu de u dans l'équation de l'orbite, on donne au terme $t\,dz^2$ un coefficient différent de l'unité, & on évite les arcs de cercle qui se rencontreroient dans l'équation de l'orbite, et qu'il faudrait faire disparoître par quelque addresse particulière, ce qui engagerait dans un calcul assés délicat ». En 1768, dans le $XXXIX^e$ mémoire « De l'intégration de l'équation de l'orbite lunaire, (& en général du problême des trois Corps) & des difficultés qui s'y rencontrent » du cinquième des *Opuscules mathématiques,* il évoque la difficile question de la stabilité du mouvement sur le long terme : « La première de ces imperfections consiste à supposer $x = a + t$, t étant une quantité fort petite par rapport à a. C'est supposer, au moins tacitement, ce qui est en question, savoir que l'orbite de la Lune, après tant de révolutions qu'on voudra, ne doit jamais s'écarter beaucoup d'un cercle. Il est vrai que cette supposition est justifiée par les observations ; mais on doit sentir que ce moyen de la justifier est indirect, & n'est pas pris dans la solution même comme il le doit être ».

Les « arcs de cercle » sont ceux qui s'introduisent si l'on résout sans précaution une équation différentielle du type ddt + $N^e t\,dz^2$ $M(t, z)dz^2 = 0$ par approximations successives. Dans l'ordre choisi par l'éditeur, c'est le dernier chapitre de la *Théorie de la Lune de 1748* qui est consacré à ce problème. Choix naturel, puisque cette étude donne la manière théorique de résoudre un telle équation à un ordre d'approximation arbitraire. Pour illustrer ceci par un exemple très (trop) simple, prétendons résoudre par approximations successives, lorsque v est très petit, l'équation ddt + $(1 - v)t\,dz^2 = 0$ en l'écrivant ddt + t di^a $= vt\,dz^2$. On commence par remplacer le second membre par 0, ce qui donne t *cos z* ⁄3 sin z. Remplaçant t par cette fonction dans le second membre, on obtient l'équation « résonnante » ddt + $t\,dz^2 = v(a \cos z + 13 \sin z)dz^2$ dont la solution est

$$t = a \cos z + p \sin z + (va/2)z \sin z - (17/3/2)z \cos z.$$

Les « arcs de cercle » de cette solution sont manifestement des artefacts qui proviennent du remplacement de la solution t = a cos -\i'1 - vz +fl **sin** VI --7vz par le début de son développement /imité en ^{y}. Faire disparaître les « arcs de cercle » en faisant varier les fréquences est une idée importante : elle est à la base des « séries de Lindstedt », dont on trouvera la théorie dans le deuxième volume des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* d'Henri Poincaré. Quant à la stabilité sur le très long terme, c'est un problème qui n'est toujours pas résolu : on aura une idée des difficultés qu'il présente (dans le cas planétaire mieux compris) en lisant le « survey » de Jacques Laskar *La stabilité du système solaire,* qui forme le chapitre 7 du livre *Chaos et déterminisme* édité au Seuil en 1992 sous la direction d'Amy Dahan, Jean-Luc Chabert et Karine Chemla.

III D'Alembert, Clairaut, Euler et le problème de l'apogée

Rappelons que l'apogée de l'orbite lunaire est le point le plus éloigné de la Terre atteint par la Lune au cours d'une révolution. Nous le confondrons ici avec l'apogée de la projection de cette orbite sur le plan de l'écliptique près duquel a approximativement lieu le mouvement de la Terre autour du Soleil (d'Alembert étudie bien entendu la différence entre les deux notions). Puisque $N^2 = 1 - 3n^2/2$, l'avance moyenne de l'apogée de la projection de l'orbite de la Lune sur le plan de l'écliptique donnée par le calcul est approximativement de 27r x $3n^2$14. À cette avance moyenne se superpose l'« équation » qui provient des termes quasi-périodiques. Comme Euler et Clairaut à la même époque, d'Alembert ne trouve que la moitié de la valeur observée. C'est le « problème de l'apogée » qu'il décrit ainsi : « Nous avons fait voir dans le chapitre précédent que le mouvement de l'apogée de la lune n'étoit que de 1°31' suivant la théorie au lieu de 3°3' dont il est suivant les observations, & que la plus grande équation de ce mouvement n'étoit aussy suivant la théorie, que la moitié de ce qu'elle est réellement; ces deux points de la théorie de la Lune, savoir le mouvement de son apogée, et l'équation de ce mouvement, sont les deux seuls que M. Newton n'ait pas déduits de la théorie de la gravitation, c'est seulement par les observations qu'il les a déterminés ; est-ce faute d'avoir pu le déduire de la théorie, ou parce qu'il a reconnu qu'en effet ils ne pouvoient s'en déduire ? C'est une question sur laquelle il ne nous est pas aisé de prononcer. Cependant nous allons faire icy quelques réflexions qui pourront aider à la résoudre. »

L'avance moyenne de l'apogée n'est pas un petit effet : les 3°3' par révolution lunaire font environ 44° par an, c'est-à-dire un tour complet en moins de 9 ans (3 233 jours) ! Or à l'époque de l'écriture de la Théorie de la Lune de 1748, Euler, Clairaut et d'Alembert s'accordent pour trouver que la théorie de l'attraction en l'inverse du carré de la distance ne fournit que la moitié de cette quantité et, le 15 novembre 1747, Clairaut soutient devant l'Académie des sciences que la théorie de Newton doit être révisée par l'addition à l'attraction d'un terme en l'inverse du cube de la distance. Mais, coup de théâtre, s'apercevant que le calcul des perturbations au deuxième ordre fournit un terme de taille comparable à celui fourni par le premier ordre, Clairaut rétracte le 17 mai 1749 ses thèses et annonce les résultats d'un texte déposé sous pli cacheté en janvier de la même année qui réconcilie théorie newtonienne et observations (ce texte ne sera publié qu'en 1752 sous le titre *De l'orbite de la Lune en ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices).*

C'est le lendemain de cette rétractation de Clairaut que d'Alembert confie, pour prendre date, son manuscrit au secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences Grandjean de Fouchy. Dans *Recherches sur différens points importons du systême du monde*, il donne le moyen de faire le calcul des perturbations aux ordres suivants sans faire apparaître d'« arcs de cercle » en suivant le dernier chapitre du manuscrit de 1748, que nous avons déjà évoqué. D'après l'éditeur du volume, cette méthode serait déjà contenue dans un pli cacheté déposé à la fin de 1747 et aujourd'hui perdu ; il n'aurait donc manqué à d'Alembert que d'appliquer numériquement sa méthode pour faire la même découverte que Clairaut. Il en retire une amertume qui s'exprimera dix ans plus tard dans le tome 9 de *l'Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) : « Je ne dois pas oublier d'ajouter 1^{0}. que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ; 2°. que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l' orbite lunaire ne devait point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la *lune* que certains mathématiciens n'avaient voulu le faire croire. Je ne dois pas non plus passer sous silence la manière élégante dont M. Euler intègre l'équation de l'orbite lunaire ; méthode plus simple & plus facile que celle de M. Clairaut & que la mienne ; & cette observation jointe à ce que j'ai dit plus haut des travaux *de ce* grand géo metre, par rapport à la *lune,* suffira pour faire voir qu'il a aussi travaillé très utilement à cette théorie, quoiqu'on ait aussi cherché à le mettre à l'écart autant qu'on a pû. L'Encyclopédie faite pour transmettre à la postérité l'histoire des découvertes de notre siecle, doit par cette raison rendre justice à tout le monde ; & c'est ce que nous croyons avoir fait dans cet article. Comme ce manuscrit est prêt à sortir de nos mains pour n'y rentrer peut-être jamais, nous ajouterons par la suite dans les supplémens de l'Encyclopédie ce qui aura été ajouté à la théorie de la *lune*, depuis le mois de Novembre 1759, où nous écrivons cet article. »

Pour calculer l'avance de l'apogée, d'Alembert commence par utiliser la formule approchée de u(z) que nous avons donnée plus haut. En annulant la dérivée de *u* par rapport à z et en utilisant le fait qu'en une apogée z_{ap}, le nombre réel Nz_{ap} est proche d'un multiple entier de 27r, il trouve l'équation approchée

$$\sin(Nz_{an}) - \sin(2z_{ap} - 2nzap)$$

D obtient ainsi une avance moyenne de l'apogée de 1°30' modulée par une « équation » périodique d'une amplitude de 6°20' qui est l'angle dont le sinus vaut 1/9. Il constate alors que les *Principia* donnent le double pour la valeur observée de l'avance moyenne mais aussi pour l'équation, avec de plus dans ce cas une différence de signe. La discussion de ce qu'il en est vraiment de l'« équation » est délicate et je renvoie aux notes 89 et 106 de Madame Chapront-Touzé pour une discussion complète. Disons seulement que d'Alembert calcule l'apogée de l'orbite de la Lune (en projection sur l'écliptique) alors que Newton étudie les mouvements « séculaires » d'une ellipse approchée. Les 6°20' de d'Alembert correspondent en gros à l'addition de deux « inégalités » :

- d'une part *l'équation semestre* de Newton dont l'amplitude (observée et non calculée par Newton) est de 12° 18' (ramené aujourd'hui à 9°39') et le signe opposé à celui de d'Alembert ; c'est une inégalité de type « séculaire », faisant intervenir un angle à longue période, l'angle du Soleil avec l'apogée de la Lune ;
- d'autre part une inégalité du même signe que celle de d'Alembert et d'amplitude 15°27' qui fait intervenir un angle dont la période est essentiellement celle de la Lune.

C'est ce dernier terme qui manque à Newton et qui, additionné au premier, montre que le calcul par d'Alembert de 1 « équation » de l'apogée est essentiellement correct.

Tout un chapitre est consacré à la recherche de causes qui pourraient compléter la gravitation newtonienne et fournir ainsi une valeur correcte de l'avance moyenne de l'apogée : l'action d'un ether et une lune oblongue sont successivement écartées à la suite de calculs précis et seule l'existence d'une autre force, peut-être magnétique et due à la Terre, est finalement retenue. Notons que contrairement à Clairaut et Euler, mais comme Buffon, d'Alembert ne considère pas la théorie newtonienne comme sérieusement mise à mal par le problème de l'avance de l'apogée de la Lune. Voici ce qu'il écrit dans l'article « Attraction » du premier volume de *l'Encyclopédie* paru en 1751 : « Ajoutons qu'on devrait être très circonspect à changer la loi du quarré des distances, quand même, ce qui n'est pas encore arrivé, on trouveroit quelque phénomene céleste, pour l'explication duquel cette loi du quarré ne suffiroit pas. Les différens points du système du monde, au moins ceux que nous avons examinés jusqu'ici, s'accordent avec la loi du quarré des distances : cependant comme cet accord n'est qu'un à-peu-près, il est clair qu'ils s'accorderaient de même avec une loi qui seroit un peu différente de celle du quarré des distances : mais on sent bien qu'il seroit ridicule d'admettre une pareille loi pour ce seul motif. Reste donc à savoir si un seul phénomène qui ne s'accorderait point avec la loi du quarré, seroit une raison suffisante pour nous obliger à changer cette loi dans tous les autres & s'il ne seroit pas plus sage d'attribuer ce phénomène à quelque cause ou loi particulière. »

Le mouvement du noeud ne pose pas de problème analogue à celui de l'apogée. Le calcul au premier ordre des pertubations suffit à en donner une bonne approximation $-3n^2/$ (l'observation montre qu'une révolution complète du noeud sur l'écliptique se fait en 18 ans 2/3 avec une petite « équation » périodique d'amplitude 1'26'). Ce mouvement est rétrograde et, dans le calcul au premier ordre, exactement opposé à l'avance moyenne de l'apogée. Bien que noté par Delaunay et Poincaré, ce fait n'a été remarqué dans toute sa généralité que par Michel Herman comme l'annulation de la trace du linéarisé du *système séculaire* du problème des $n \pm 1$ corps dans l'espace, au point singulier correspondant à n mouvements circulaires, coplanaires et de même sens. Cette propriété est reliée au caractère harmonique du potentiel newtonien en dimension trois dans l'article « On a strange resonance noticed by Michel Herman » de Khaled Abdullah et Alain Albany *(Regular and Chaotic Dynamics,* 6 (4) (2001) pp. 421-432.)

iv À suivre...

Le volume est extrêmement cohérent puisque la théorie de la Lune de 1748 est précédée de textes qui, à l'exception du premier, sont consacrés au problème de la Lune ou plus généralement à la théorie de la résolution par approximations (méthode des perturbations) des équations différentielles qui régissent le mouvement des planètes. C'est le cas de la *Méthode générale pour déterminer les orbites de toutes les planètes, eu égard à leur action mutuelle.* Il est rendu lisible – ce qui concernant d'Alembert ne va pas de soi – par le remarquable travail d'édition et d'explicitation de Mme Chapront-Touzé ainsi que par sa passionnante introduction à l'ensemble du volume, dans laquelle elle décrit en détail l'histoire du problème de l'apogée.

Ce premier volume, de 532 pages, inaugure superbement l'entreprise audacieuse qu'est l'édition critique des oeuvres complètes de d'Alembert sous la coordination générale d'Irène Passeron. Bruno Morando, chaleureusement évoqué par IVIichelle Chapront-Touzé, est mort trop tôt pour le voir. Il l'aurait aimé.

Cinq séries sont prévues, totalisant près de cinquante volumes. Pour plus de détails, se reporter au site http://maply.univ-lyonl.fr/dalembert/ qui contient en particulier, pour le volume qui vient de paraître, une « présentation des éditeurs » donnant en deux pages un résumé précis de la crise de la gravitation dans les années 1747-1749.

On ne peut que souhaiter que les volumes suivants soient édités avec autant de rigueur et de compétence.

Merci aux membres de l'équipe A.S.D. pour leurs commentaires et relectures ; merci à Michelle Chapront-Touzé pour des éclaircissements sur l'« équation » de l'apogée.

Alain C henc iner
Institut de Mécanique Céleste (IMCCE)
et Université Paris VII